

Циліндричний гармонічний аналіз магнітного поля в апертурі надпровідної обмотки електромагніта

А. В. Гетьман

Отримані аналітичні вирази для середньо-інтегральних по довжині коефіцієнтів циліндричних гармонік магнітної індукції, створюваної надпровідною обмоткою всередині апертури дипольного або квадрупольного прямого електромагніту на основі геометричних параметрів обмотки. Показана пропорційність середньо-інтегральних вкладів в магнітну індукцію, створюваних неосновними гармоніками, середньо-інтегральному значенню основного поля

Ключові слова: пучок частинок, дипольний електромагніт, квадрупольна обмотка, циліндрична гармоніка, магнітна індукція

1. Введение

В циклических ускорителях для транспортировки по орбите и формирования поперечного размера пучка частиц традиционно используются электромагниты. Обеспечение качественной транспортировки и фокусировки является актуальным с точки зрения «временем жизни» пучка частиц в ускорителе. Создаваемое электромагнитами в апертуре поперечное магнитное поле оказывает силовое воздействие на пучок частиц. В зависимости от пространственной структуры магнитного поля электромагнита оказываемое силовое воздействие на частицы эквивалентно воздействию оптических элементов на луч света. При этом отклонения от заданного закона распределения магнитного поля в апертуре магнита эквивалентны дефектам соответствующего оптического элемента (линзы). При моделировании магнитной индукции в апертуре дипольного или квадрупольного электромагнита рассматривают только две поперечные проекции. В апертуре продольная (вдоль движения пучка) составляющая создаваемого магнитного поля оказывает существенно меньшее силовое воздействие на заряженные частицы. Поперечные составляющие магнитной индукции внутри апертуры представляют в виде ряда полярных гармоник для каждой плоскости поперечного сечения [1]. Такое представление поля позволяет представить силовое воздействие на пучок в форме удобной для расчета траектории. Количественным критерием качества создаваемого электромагнитом магнитного поля является суммарный относительный вклад от гармоник, создающих не основное магнитное поле.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Представление магнитной индукции в виде ряда [2] полярных гармоник для каждой плоскости поперечного сечения электромагнита имеет особенность. Применение ряда полярных гармоник математически корректно для бесконечно длинных электромагнитов. Для реальных электромагнитов конечной длины ис-

пользование 2D модели магнитного поля на основе полярных гармоник является, вообще говоря, приближением. Поскольку в зависимости от положения плоскости рассмотрения поля относительно центра электромагнита изменяются величины коэффициентов гармоник. Другими словами, коэффициенты полярных гармоник являются не постоянными, а функцией от продольной координаты плоскости сечения электромагнита. Аналитическая 2D модель магнитного поля не даёт возможности рассчитать продольные изменения коэффициентов полярных гармоник. Поэтому для их расчета используют 3D модели на основе метода конечных элементов. Такой порядок расчета продольных изменений коэффициентов полярных гармоник не удобен в случае решения обратной задачи, в частности для проведения оптимизации конструкции по заданным характеристикам поля. К тому же при описании силового воздействия магнитного поля на пучок частиц традиционно используют средне-интегральные по длине магнита значения коэффициентов полярных гармоник [3]. Расчет средне-интегральных гармоник основан на интегрировании результатов Фурье-анализа, который в свою очередь использует данные о магнитном поле, полученные методом конечных элементов [4]. Столь сложная цепочка 3D анализа и расчета не позволяет напрямую связать продольные параметры конструкции электромагнита с его магнитными характеристиками, представленными в форме удобной для расчета силового воздействия на пучок частиц [5]. Практическая необходимость таких взаимосвязей между параметрами конструкцией электромагнита и его магнитными характеристиками очевидна как на этапе разработки, так и для настройки уже изготовленных образцов.

Создаваемое электромагнитом в апертуре магнитное поле может быть представлено в виде двух составляющих: поля железного ярма и поля токовой обмотки. При использовании электромагнитов, созданных по классической схеме с железным ярмом, но имеющих сверхпроводящую токовую обмотку, следует учитывать возросший вклад (около трети) в суммарное магнитное поле от последней.

Токовая обмотка прямых дипольных и квадрупольных магнитов может быть представлена в виде наборов прямолинейных участков с током и торцевых элементов [6]. Для расчета магнитного поля в центральном поперечном сечении электромагнита применяют 2D модели магнитной индукции [7], считая прямолинейные участки токовой обмотки бесконечно длинными. Такое приближение не позволяет полностью учитывать реальную геометрию токовой обмотки и потому может быть использовано как оценочное и требующее последующего 3D расчета [8].

Поэтому представляет практический интерес создание таких моделей магнитного поля электромагнита, которые позволяют поставить в соответствие средне-интегральным по длине коэффициентам гармоник магнитной индукции некоторые конструктивные параметры электромагнита [9].

Для этого целесообразно проведение цилиндрического гармонического анализа магнитного поля создаваемого сверхпроводящей токовой обмоткой отдельно от поля железного ярма. Прежде всего, интерес представляют прямые выражения для средне-интегральных гармоник, позволяющие решать обратную

задачу поиска оптимальной геометрии сверхпроводящей обмотки. Учитывая небольшое (порядка десяти) количество витков сверхпроводящей обмотки, рационально проводить расчет средне-интегральных гармоник в виде суммы вкладов витков.

3. Цель и задачи исследования

Целью работы является построение 3D модели цилиндрических гармоник магнитного поля, создаваемого токовой обмоткой внутри апертуры дипольного (или квадрупольного) прямого электромагнита. Модель позволит решать задачу оптимизации конструкции электромагнита путем прямого расчета средне-интегральных по длине цилиндрических гармоник магнитной индукции на основе геометрических параметров сверхпроводящей обмотки.

Для достижения поставленной цели в работе должны быть решены следующие задачи:

- провести цилиндрический гармонический анализ магнитной индукции сверхпроводящей токовой обмотки дипольного и квадрупольного электромагнитов;
- получить прямые выражения для неосновных средне-интегральных гармоник магнитной индукции обмотки дипольного и квадрупольного электромагнитов;
- провести верификацию полученных выражений путем сравнения с результатами численного расчета средне-интегральных гармоник магнитной индукции.

4. Исходные положения и допущения для проведения цилиндрического гармонического анализа магнитной индукции

Будем рассматривать магнитное поле, создаваемое сверхпроводящей обмоткой дипольного (рис. 1, 2) или квадрупольного (рис. 3, 4) прямого электромагнита.

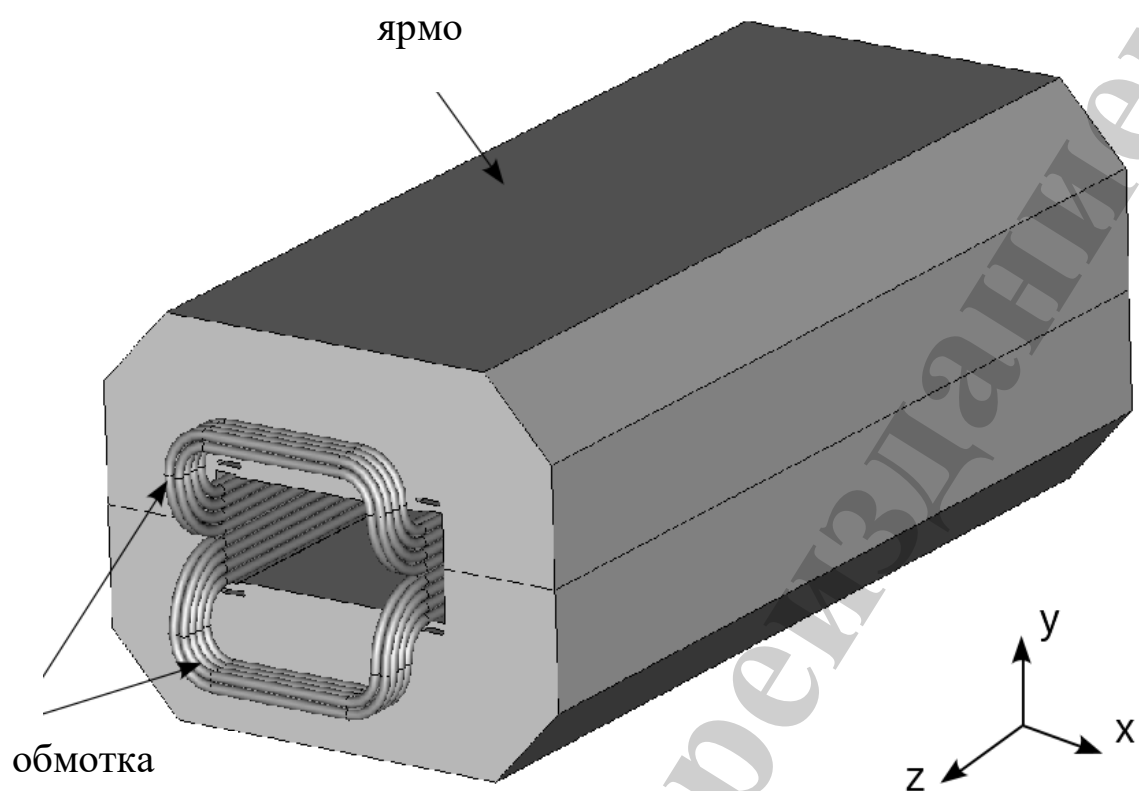


Рис. 1. Дипольный электромагнит со сверхпроводящей обмоткой

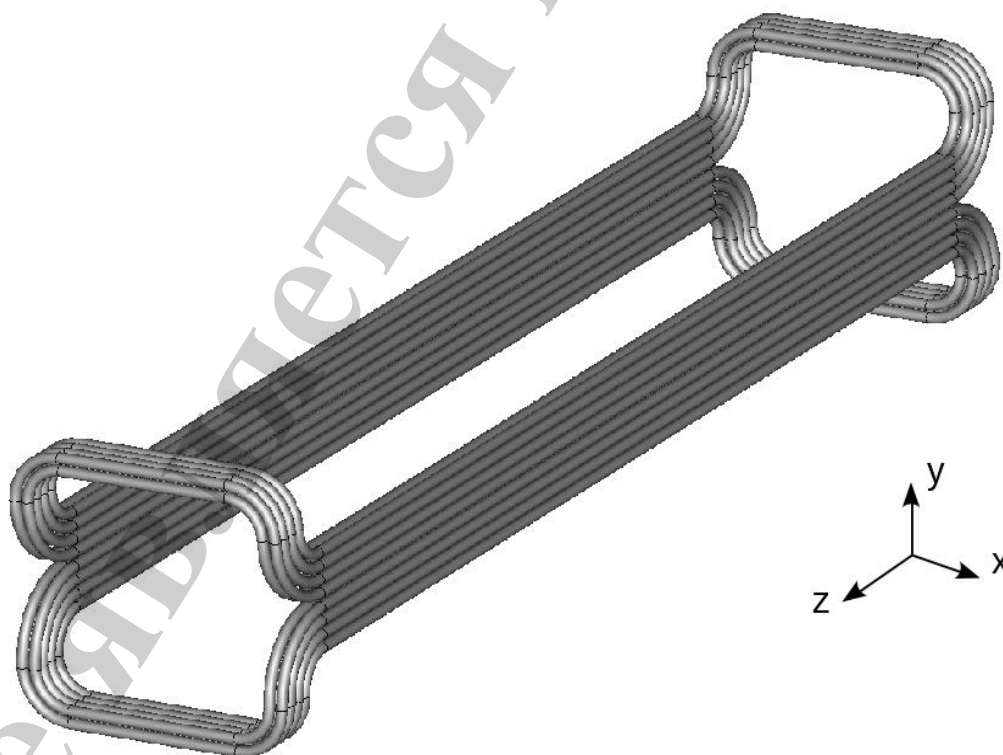


Рис. 2. Сверхпроводящая обмотка дипольного электромагнита

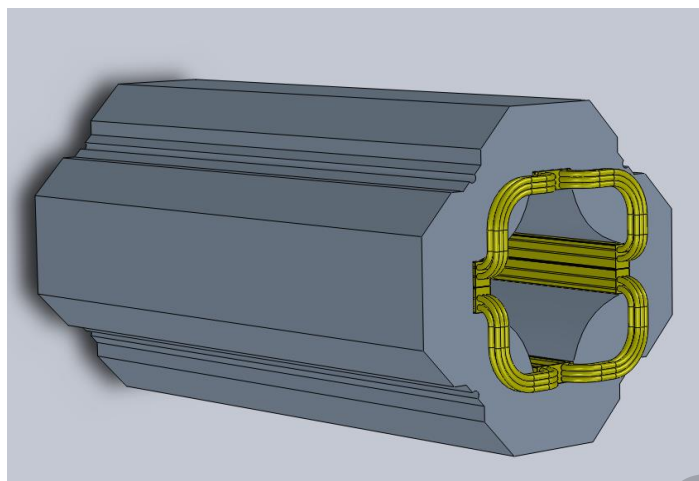


Рис. 3. Квадрупольный электромагнит со сверхпроводящей обмоткой

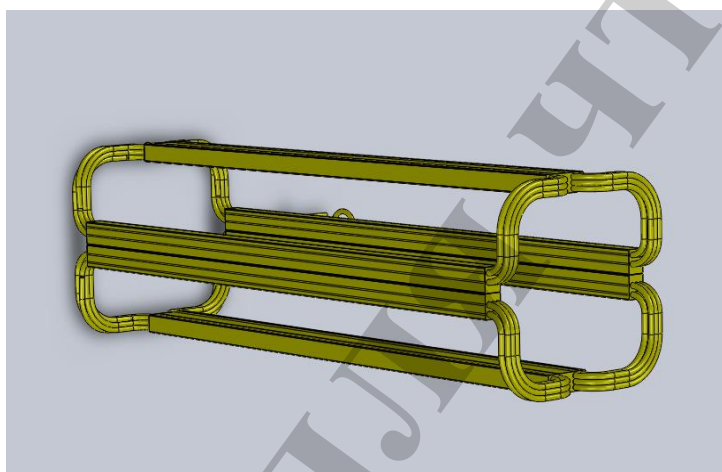


Рис. 4. Сверхпроводящая обмотка квадрупольного электромагнита

Для каждой плоскости поперечного сечения согласно [2] допустимо представление поперечных проекций магнитной индукции B_ρ и B_ϕ в виде ряда:

$$B_\phi(\rho, \phi, z) + iB_\rho(\rho, \phi, z) = B_0(z) \sum_{n=1}^{\infty} [b_n(z) + ia_n(z)] \left(\frac{\rho}{R_{ref}}\right)^{n-1} e^{in\phi}, \quad (1)$$

где ρ , ϕ , z – цилиндрические координаты точки наблюдения магнитного поля; $B_0(z)$ – главное значение магнитной индукции; $b_n(z)$, $a_n(z)$ – коэффициенты полярной гармоники степени n .

Под референтным радиусом R_{ref} подразумевается радиус окружности, по данным магнитной индукции на которой были определены коэффициенты полярных гармоник.

Средне-интегральные по длине значения коэффициентов гармоник из (1) вводят на основании [2]:

$$b_n^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} b_n(z) B_0(z) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} B_0(z) dz} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} b_n(z) B_0(z) dz}{B_c L_{eff}}, \quad (2)$$

$$a_n^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} a_n(z) B_0(z) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} B_0(z) dz} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} a_n(z) B_0(z) dz}{B_c L_{eff}}, \quad (3)$$

где B_c – главное значение магнитной индукции в центральном поперечном сечении электромагнита; L_{eff} – эффективная длина электромагнита вводимая как:

$$L_{eff} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} B_0(z) dz}{B_c}. \quad (4)$$

Для упрощения геометрического описания обмотки будем считать, что торцевые элементы лежат в плоскости, перпендикулярной продольной оси магнита. При этом торцевые элементы каждого витка представим в виде последовательно соединенных прямых участков бесконечно тонкого провода, например так, как показано для квадрупольной обмотки на рис. 5.

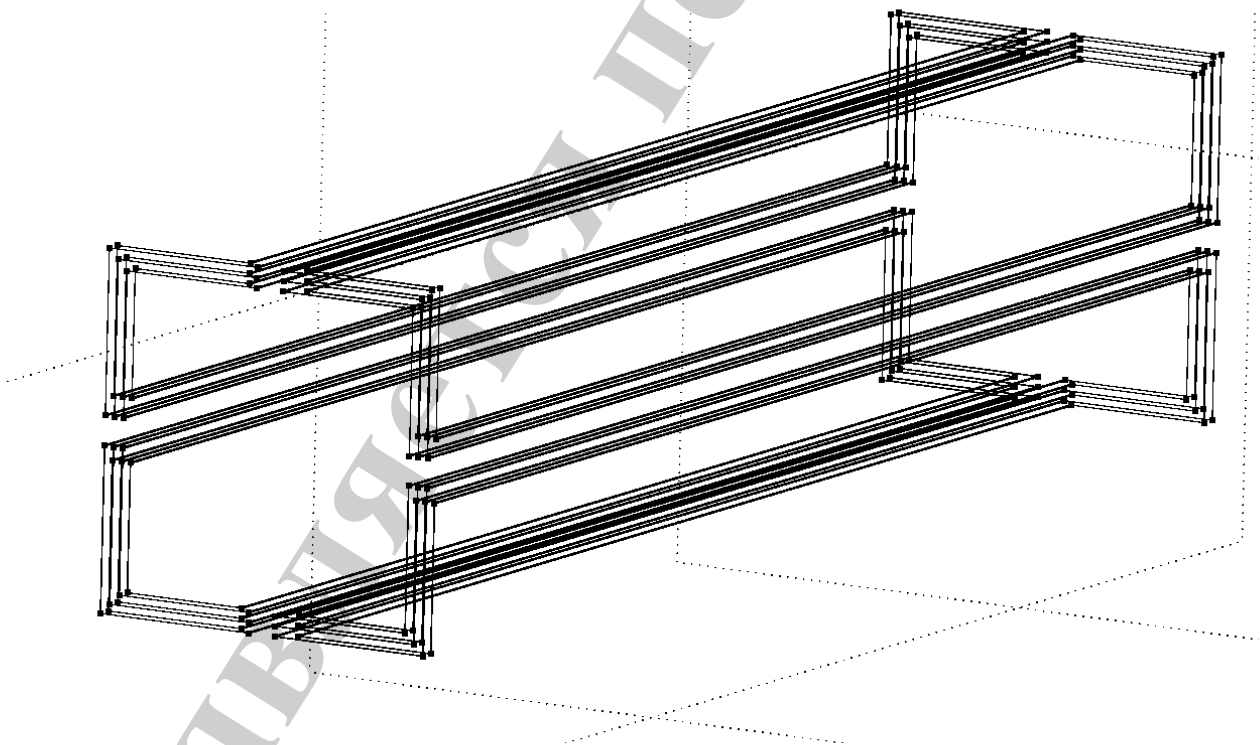


Рис. 5. Упрощенное представление элементов токовой обмотки квадрупольного электромагнита

Кроме того, сначала получим описание магнитного поля, создаваемого только одним витком из обмотки. Это позволит исключить непринципиальный

индекс номера витка в математических выражениях. В окончательном представлении результата для всей обмотки введем дополнительный индекс суммирования по всем виткам.

Будем использовать одинаково как для квадрупольного, так и для дипольного случая упрощенное представление продольных элементов витка в виде прямолинейных токов и сначала найдём для них представление средне-интегральных гармоник.

5. Метод цилиндрического гармонического анализа магнитного поля, создаваемого продольными участками обмотки

Получим сначала представление для средне-интегральных гармоник, создаваемых одним продольным элементом витка токовой обмотки. Пусть точка наблюдения магнитного поля всегда лежит в плоскости $z=0$ системы координат, центр которой лежит на продольной оси электромагнита.

Две проекции магнитной индукции в цилиндрической системе координат могут быть описаны на основе единственной проекции векторного потенциала A_z магнитного поля [10].

$$\begin{aligned} B_\rho(\rho, \phi, 0) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) dz_0, \\ B_\phi(\rho, \phi, 0) &= -\frac{\partial}{\partial \rho} A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) dz_0. \end{aligned} \quad (5)$$

С другой стороны, магнитное поле в апертуре электромагнита может быть представлено на основе сферических гармоник скалярного потенциала [10]. С учетом соотношения между расстоянием до точки наблюдения и расстоянием до элементов с током $r < r_0$ воспользуемся внутренним решением для скалярного потенциала в совмещенной сферической системе координат:

$$\begin{aligned} B_\rho(\rho, \phi, 0) &= -\frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_0 U) = \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} a_n^m \cos m\phi \\ b_n^m \sin m\phi \end{Bmatrix} \right), \\ B_\phi(\rho, \phi, 0) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_0 U) = \\ &= -\frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta) \begin{Bmatrix} a_n^m \cos m\phi \\ b_n^m \sin m\phi \end{Bmatrix} \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где r, θ, ϕ – сферические координаты точки наблюдения поля.

Следует заметить, что из всех сферических гармоник в (6) условию равенства нулю продольной проекции магнитной индукции ($B_z=0$) удовлетворяют только секториальные (у которых $m=n$). Секториальные гармоники не имеют зависимости от аппликаты, что следует из представления присоединенных

функций Лежандра на основе формулы Родрига в виде суммы:

$$\begin{aligned}
 r^n P_n^m(\cos \theta) &= r^m r^{n-m} (\sin \theta)^m \sum_{s=0}^{n-m} c_s (\cos \theta)^s = \\
 &= (r \sin \theta)^m \sum_{s=0}^{n-m} c_s r^{n-m} (\cos \theta)^s = \\
 &= \rho^m (c_{n-m} z^{n-m} + \sum_{s=0}^{n-m-1} c_s r^{n-m} (\cos \theta)^s).
 \end{aligned} \tag{7}$$

Поэтому в рассматриваемом случае справедливо представление:

$$\begin{aligned}
 B_\rho(\rho, \phi, 0) &= -\frac{\partial}{\partial \rho} (\mu_0 U) = \\
 &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (2n-1)!! \left\{ \begin{matrix} a_n^n \cos n\phi \\ b_n^n \sin n\phi \end{matrix} \right\} \right), \\
 B_\phi(\rho, \phi, 0) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mu_0 U) = \\
 &= -\frac{\mu_0}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (2n-1)!! \left\{ \begin{matrix} a_n^n \cos n\phi \\ b_n^n \sin n\phi \end{matrix} \right\} \right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Воспользовавшись представлением обратного расстояния через сферические гармоники [10]:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{r_0^{n+1}} \times \\
 &\times \left(\begin{matrix} P_n(\cos \theta_0) P_n(\cos \theta) + \\ + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\cos \theta_0) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\phi - \phi_0) \end{matrix} \right),
 \end{aligned} \tag{9}$$

после подстановки его в (5), для коэффициентов сферических гармоник b_n^n , a_n^n из (8) можно получить выражение:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} a_n^n \\ b_n^n \end{cases} &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!} \rho_0^n \times \\
 &\times \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz_0}{\left(\sqrt{(z_0 + z_c)^2 + (\rho_0)^2} \right)^{2n+1}} \begin{cases} \sin n\phi_0, \\ -\cos n\phi_0, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{10}$$

где z_c – продольная координата центра прямолинейного участка длиной L с током I .

После сравнения выражений для коэффициентов из (1) и (8) можно записать:

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a_n(z_c) \\ b_n(z_c) \end{cases} &= -n(2n-1)!! \frac{R_{ref}^{n-1}}{B_0(z_c)} \begin{cases} a_n^n \\ b_n^n \end{cases} = \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{n[(2n-1)!!]^2}{(2n)!} \frac{R_{ref}^{n-1}}{B_0(z_c)} \rho_0^n \times \\
&\times \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz_0}{\left(\sqrt{(z_0+z_c)^2 + (\rho_0)^2}\right)^{2n+1}} \begin{cases} \sin n\phi_0, \\ -\cos n\phi_0, \end{cases}
\end{aligned} \tag{11}$$

По определению коэффициенты $b_n(z_c)$, $a_n(z_c)$ имеют смысл относительного вклада в магнитную индукцию неосновной гармоники степени n в плоскости поперечного сечения на расстоянии z_c от центра электромагнита. При этом для основной гармоники $n=\text{main}$ нормального электромагнита коэффициент $b_{\text{main}}(z)$ равен единице (при $a_{\text{main}}(z)=0$), а для skew-электромагнита $a_{\text{main}}(z)$ равен единице (при $b_{\text{main}}(z)=0$).

6. Цилиндрические гармоники магнитного поля дипольной обмотки

Для случая основного поля нормального дипольного электромагнита из (11) непосредственно получаем:

$$B_0(z_c) = -\frac{\mu_0 I \rho_0 \cos \phi_0}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dz_0}{\left(\sqrt{(z_0+z_c)^2 + \rho_0^2}\right)^3}. \tag{12}$$

Откуда для центрального поперечного сечения с $z_c=0$ можно получить значение основного поля, создаваемого одним продольным прямолинейным участком витка дипольной обмотки:

$$B_0(0) = -\frac{\mu_0 I \cos \phi_0}{2\pi \rho_0} \frac{L}{\sqrt{L^2 + (2\rho_0)^2}}. \tag{13}$$

Соответственно эффективная длина может быть представлена на основании интеграла в (4) в виде:

$$L_{eff} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} B_0(z_c) dz_c}{B_0(0)} = \sqrt{L^2 + (2\rho_0)^2}. \tag{14}$$

Вклад в средне-интегральную гармонику степени n на основании (2) после интегрирования может быть представлен в виде:

$$b_n^* = \left(\frac{R_{ref}}{\rho_0} \right)^{n-1} \frac{\cos n\phi_0}{\cos \phi_0}. \tag{15}$$

Полученные выражения (11)–(15) относятся лишь к одному – прямому проводу витка дипольной обмотки с координатами $(\rho_0; \phi_0; z_c-L/2, z_c+L/2)$. Учтем, что в дипольной обмотке всегда присутствует обратный провод (с током в противоположном направлении), но имеющий в силу симметрии координаты $(\rho_0;$

$\varphi_0 + \pi; z_c - L/2, z_c + L/2$), будем считать такую пару одной на виток. Если просуммировать числитель и знаменатель из (2) по всем виткам, подставляя координаты прямых проводов, то получим относительный вклад средне-интегральной гармоники степени n (не основного поля) от продольных элементов дипольной токовой обмотки в магнитную индукцию. Окончательно для дипольной обмотки из w витков получим выражение для относительных средне-интегральных коэффициентов гармоник магнитной индукции:

$$b_n^* = \frac{\sum_w \frac{L_w}{\rho_{0w}} \left(\frac{R_{ref}}{\rho_{0w}} \right)^{n-1} \cos n\varphi_{0w}}{\sum_w \frac{L_w}{\rho_{0w}} \cos \varphi_{0w}}. \quad (16)$$

При идеальном расположении витков дипольной обмотки суммарное магнитное поле от продольных участков содержит только гармоники нечетных степеней $n=2k+1$, где $k=0, 1, 2, \dots$

7. Цилиндрические гармоники магнитного поля квадрупольной обмотки

По аналогии получим выражения для случая обмотки нормального квадрупольного электромагнита. Учитывая, что для квадрупольного случая главное поле описывается гармоникой степени $\text{main}=2$ из (11), то для одного продольного прямолинейного участка с координатами $(\rho_0; \varphi_0; z_c - L/2, z_c + L/2)$ токовой обмотки получим выражение:

$$B_0(z_c) = -\frac{3\mu_0 I R_{ref}}{8\pi} \cos 2\varphi_0 \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{\rho_0^2 dz_0}{\left(\sqrt{(z_0 + z_c)^2 + \rho_0^2} \right)^5}. \quad (17)$$

Из (17) подстановкой расстояния $z_c=0$ от плоскости рассмотрения поля до центрального поперечного сечения электромагнита непосредственно получается выражение для главного значения магнитной индукции на референтном радиусе:

$$B_0(0) = -\frac{\mu_0 I L R_{ref} \cos 2\varphi_0}{2\pi \rho_0^2} \frac{L^2 + 6(\rho_0)^2}{\left(\sqrt{L^2 + (2\rho_0)^2} \right)^3}. \quad (18)$$

По аналогии с (14) эффективная длина участка тока по квадрупольной гармонике определится из выражения:

$$L_{eff} = \frac{\left(\sqrt{L^2 + (2\rho_0)^2} \right)^3}{L^2 + 6(\rho_0)^2}. \quad (19)$$

Относительный вклад в средне-интегральную гармонику степени n на основании (2) после интегрирования может быть представлен в виде:

$$b_n^* = \left(\frac{R_{ref}}{\rho_0} \right)^{n-2} \frac{\cos n\phi_0}{\cos 2\phi_0}. \quad (20)$$

Особенностью симметрии квадрупольной обмотки является наличие двух прямых и двух обратных проводов расположенных через угол $\pi/2$ таким образом, что, выбрав в качестве исходного прямой провод с координатами $(\rho_0; \phi_0; z_c - L/2, z_c + L/2)$, для всей четверки прямых продольных участков обмотки (эквивалента одного витка) справедливо выражение (20). Проведя суммирование по всем w виткам обмотки и подставив в (2), получим относительный средне-интегральный вклад в магнитную индукцию основного поля от гармоники степени n , создаваемой всей квадрупольной обмоткой:

$$b_n^* = \frac{\sum_w \frac{L_w}{\rho_{0w}} \left(\frac{R_{ref}}{\rho_{0w}} \right)^{n-1} \cos n\phi_{0w}}{\sum_w \frac{L_w R_{ref}}{(\rho_{0w})^2} \cos 2\phi_{0w}}. \quad (21)$$

Следует заметить, что в случае идеально точного расположения продольных участков квадрупольной обмотки в спектре создаваемых цилиндрических гармоник будут присутствовать только имеющее степень $n=2+4k$, где $k=0, 1, 2, \dots$, и отсутствовать все синусные (skew) гармоники.

8. Цилиндрические гармоники магнитного поля, создаваемого торцевыми элементами обмотки

Представим торцевые элементы токовой обмотки в упрощенном виде, как показано на рис. 5. Пусть для каждого витка торцевые элементы представляют собой прямолинейные участки бесконечно-тонкого провода, ориентированные перпендикулярно друг другу. Тогда векторный потенциал, записанный для одного такого прямолинейного участка торца обмотки, будет иметь только одну декартову проекцию A_x , если участок параллелен оси абсцисс, или A_y , если участок параллелен оси ординат. Соответственно у магнитной индукции отличными от нуля будут только две декартовы проекции. Рассмотрим, для определенности, участок обмотки параллельный оси ординат ($y_1=0, y_2=0.135$). Тогда поперечная оси симметрии магнита компонента магнитной индукции B_x будет нечетной функцией от продольной координаты z (рис. 6).

Соответственно интеграл от этой проекции, взятый в симметричных пределах $\pm\infty$, будет равен нулю:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} B_x dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial z} A_y \right) dz = \\ &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial z} \int_y^{y''} \frac{dy_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} dz. \end{aligned} \quad (22)$$

Соответственно нулю будут равны вклады в средне-интегральные гармоники от всех торцевых элементов токовой обмотки.

9. Верификация и обсуждение результатов, полученных цилиндрическим гармоническим анализом и численным расчетом.

Для проверки полученных аналитических выражений для средне-интегральных коэффициентов гармоник был проведен их численный расчет на основе (2). При этом были использованы типичные значения для параметров сверхпроводящей обмотки дипольного электромагнита. Ток в обмотке 10 кА, длина прямолинейного участка обмотки $L=1$ м, полярные координаты витка ($\rho_0=0,14$ м; $\phi_0=5^\circ$), $R_{ref}=0,07$ м. Значения параметров были подставлены в выражение:

$$b_n^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} B_\phi(R_{ref}, \phi, z) \cos(n\phi) d\phi \right) dz}{\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} B_\phi(R_{ref}, \phi, z) \cos(\phi) d\phi \right) dz}. \quad (23)$$

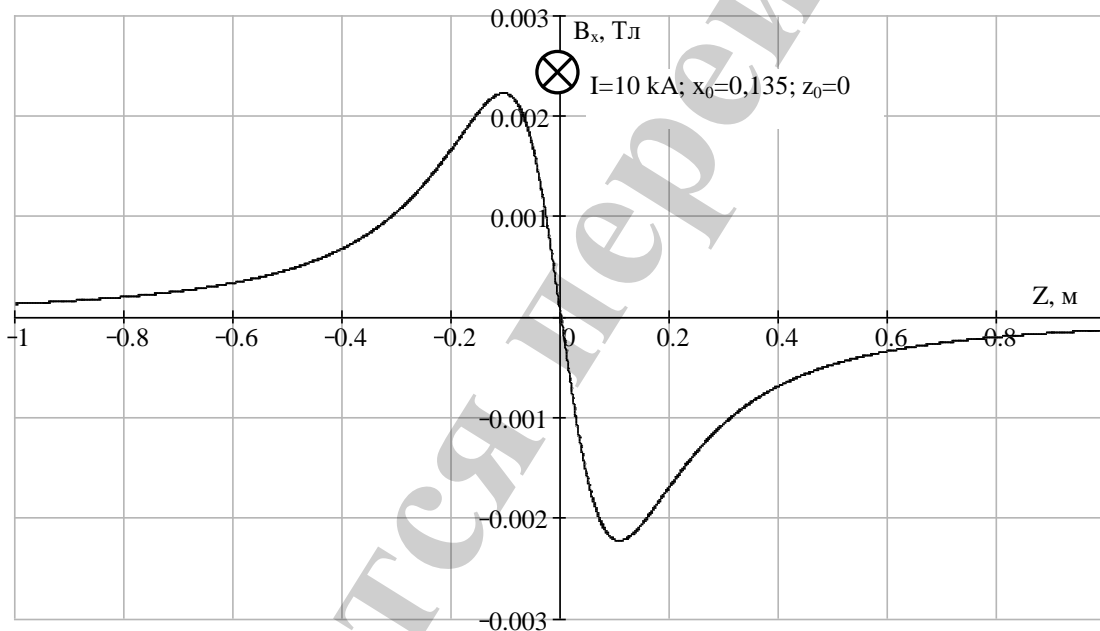


Рис. 6. Зависимость поперечной проекции магнитной индукции, создаваемой одним прямолинейным токовым элементом торцевого участка обмотки

Для расчета по (23) было использовано выражение для угловой проекции магнитной индукции B_ϕ из (5):

$$\begin{aligned} B_\phi(R_{ref}, \phi, z) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) dz_0 = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\rho_0 \cos(\phi - \phi_0) - R_{ref}}{\left(\rho_0^2 + (R_{ref})^2 - 2\rho_0 R_{ref} \cos(\phi - \phi_0) + (z - z_0)^2 \right)^{3/2}} dz_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Разность между результатами аналитического и численного расчетов, приведенными в табл. 1, близка к погрешности вычислений.

Таблица 1

Значения средне-интегральных коэффициентов гармоник, полученных с помощью аналитического и численного расчета

Коэффициент гармоник	Аналитический расчет	Численный расчет	Относительная погрешность
b_3^*	0,242403877	0,24240412	0,0001 %
b_5^*	0,05686067	0,05686061	0,0001 %
b_7^*	0,01284816	0,01284814	0,0001 %

Полученные выражения для средне-интегральных значений коэффициентов неосновных гармоник магнитной индукции, создаваемых дипольной (16) и квадрупольной (21) обмотками, позволяют учитывать реальную длину витков сверхпроводящей обмотки. Полученный результат хорошо согласуется с аналогичными формулами известной двумерной модели [11].

Очевидно, что условие расположения торцевых элементов обмотки в плоскости, перпендикулярной продольной оси электромагнита, является достаточным для исключения их вкладов в средне-интегральные гармоники. Также является очевидным эффект подмагничивания торцевыми элементами железного ярма, что должно приводить к возникновению «несвойственных» по симметрии гармоникам магнитной индукции. Однако расчет такового влияния возможен только численными методами.

Практическая ценность полученных аналитических представлений состоит в том, что они позволяют рассчитать необходимую коррекцию геометрических параметров текущей обмотки. Такая необходимость возникает при оптимизации магнитного поля внутри апертуры дипольных и квадрупольных электромагнитов по заданным средне-интегральным коэффициентам.

10. Выводы

1. Показана возможность представления в виде ряда полярных гармоник для плоского магнитного поля, создаваемого продольными участками дипольной (или квадрупольной) обмотки с током порядка 10 кА. Полученное представление магнитного поля основано на сферических секториальных гармониках внутреннего решения для скалярного потенциала, взятых с коэффициентами, зависящими от продольной координаты.

2. Получены аналитические выражения для средне-интегральных по длине коэффициентов цилиндрических гармоник магнитной индукции, создаваемой сверхпроводящей токовой обмоткой дипольного и квадрупольного электромагнита. Показана пропорциональность основному полю средне-интегральных вкладов в магнитную индукцию, создаваемых неосновными гармониками.

3. Показана сложность учёта вкладов в средне-интегральные значения коэффициентов гармоник от торцевых элементов обмотки, поскольку эти вклады возникают только в присутствии железного ярма, как результат его подмагничивания.

4. Полученные аналитические представления средне-интегральных коэффициентов гармоник магнитной индукции позволяют проводить оптимизации магнитного поля, имеющего значение порядка 1,5 Тл, внутри апертуры дипольных и квадрупольных электромагнитов. Необходимая коррекция геометрических параметров токовой обмотки может быть рассчитана с погрешностью не хуже 10^{-5} по заданным величинам средне-интегральных гармоник магнитной индукции.

Литература

1. Russenschuck S., Tortschanoff T. Mathematical optimization of superconducting accelerator magnets // IEEE Transactions on Magnetics. 1994. Vol. 30, Issue 5. P. 3419–3422. doi: 10.1109/20.312673
2. Russenschuck S. Differential Geometry Applied to Coil-End Design // Field computation for accelerator magnets. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2010. P. 609–636. doi: 10.1002/9783527635467.ch19
3. Design Challenges for a Wide-Aperture Insertion Quadrupole Magnet / Russenschuck S., Auchmann B., Perez J. C., Ramos D., Fessia P., Karppinen M. et. al. // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2011. Vol. 21, Issue 3. P. 1674–1678. doi: 10.1109/tasc.2011.2105453
4. Fischer E., Khodzhbagiyani H. G., Kovalenko A. D. Full Size Model Magnets for the FAIR SIS100 Synchrotron // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2008. Vol. 18, Issue 2. P. 260–263. doi: 10.1109/tasc.2008.922261
5. Full size prototype magnets for heavy ion superconducting synchrotron SIS100 at GSI: status of manufacturing and test at JINR / Kovalenko A., Agapov N., Alfeev A. et. al. // EPAC'08. Genoa, 2008. P. 2443–2445.
6. Numerical Analysis of the Operation Parameters of Fast Cycling Superconducting Magnets / Fischer E., Schnizer P., Kurnyshov R., Schnizer B., Shcherbakov P. // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2009. Vol. 19, Issue 3. P. 1266–1269. doi: 10.1109/tasc.2009.2018746
7. Magnetic Field Measurement for Synchrotron Dipole Magnets of Heavy-Ion Therapy Facility in Lanzhou / Yang W., Zhang X., Han S., Yang J., Pei C., Yang L. et. al. // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2014. Vol. 24, Issue 3. P. 1–4. doi: 10.1109/tasc.2013.2289953
8. Magnetic Field Design of the Dipole for Super-FRS at FAIR / Yao Q. G., Ma L. Z., Zhang X. Q., He Y., Wu W., Moritz G. et. al. // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2010. Vol. 20, Issue 3. P. 172–175. doi: 10.1109/tasc.2009.2038890
9. Magnetic Field Analysis for Superferric Accelerator Magnets Using Elliptic Multipoles and Its Advantages / Schnizer P., Schnizer B., Akishin P., Fischer E. // IEEE Transactions on Applied Superconductivity. 2008. Vol. 18, Issue 2. P. 1605–1608. doi: 10.1109/tasc.2008.920636
10. Vanderlinde J. Classical electromagnetic theory. Springer, 2005. 420 p. doi: 10.1007/1-4020-2700-1
11. Wolff S. Superconducting accelerator magnet design // AIP Conference Proceedings. 1992. Vol. 249. doi: 10.1063/1.41989